Adı Soyadı:

Numarası:

31.12.2018

VEKTÖREL ANALİZ FİNAL SORULARI

1) $A = i + 3j - 2k, \quad B = j + k, \quad C = i - j$ vektörleri verilsin.

a) A ve B vektörlerini üzerine kurulan paralel yüzlünün alanını bulunuz.

b) A, B, C vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlü cismin hacmini bulunuz.

2) $A(-1,0,1)$, $B(1,-1,1)$, $C(3,1,0)$ noktalarından geçen düzlemin vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

3) $f(x,y,z) = xy^2 + zx^2 + zy$ skaler alan fonksiyonunun $P(1,-1,0)$ noktasında $A = i + k$ vektörü yönündeki türevini bulunuz.

4) $f(x,y,z) = xy^2 + zx^2 + zy$ skaler alan fonksiyonu için

a) $gradf$ =?

b) Hangi yöndeki türevi maksimumdur.

5) $F(x,y,z) = x^2yi + y^2zj + z^2k$ vektör alan fonksiyonunun $P_0(-1,0,-1)$ noktasında ve $A = i + j$ vektörü yönündeki yönlendirilmiş türevini bulunuz.

Not: Sadece dört soru cevaplandırınız.

Başarılar

Dr. Öğr. Üyesi

Nihat Altınışık

Çözümler

1) a)

Alan = $\|A \times B\|$ dır.

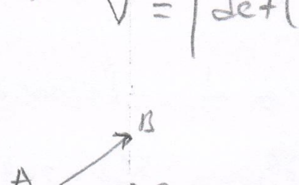
$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5i - j + k \Rightarrow \text{Alan} = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27}\ br^2 \text{ olur}$$

b)

$$V = \left| \det(A,B,C) \right| \Rightarrow \det(A,B,C) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3-(-2-1) = 6\ br^3$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

2)



det(AB, AC, AP) = 0 olması gerekir. Buradan bu üç vektörün lineer bağımlı olması çıkar. Yani AP = u AB + V AC şek u ve V parametresi vardır. Bu düzlemin vektörel denklem

$(x+1, y, z-1) = u(2,-1,0) + V(4,1,-1) \Rightarrow x+1 = 2u+4V, \ y = -u+V$

$z-1 = -V \Rightarrow \underline{x = 2u+4V-1}, \ \underline{y = -u+V}, \ \underline{z = -V+1}$ parametrik denk

Burada u ve V yok edilirse $V = 1-z$ $\ u = 1-z-y$ yazılırsa

kartezyen denklemidir. Düzenlenirse

3) $f(x,y,z) = xy^2 + zx^2 + zy$

öncelikle $u = \frac{A}{\|A\|} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ birim vektörü oluşturulur.

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P=P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} u_2 + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} u_3 \text{ dır.}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2zx \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0(1,-1,0)} = (-1)^2 + 2.0.1 = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{P_0} = 1^2 - 1 = 0$

$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + z \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 2.1.-1 + 0 = -2$

$$\left.\frac{df(P)}{dP}\right|_{P_0} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olur.}$$

4) $f(x,y,z) = xy^2 + zx^2 + zy$ a) $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$

$= (y^2 + 2zx)i + (2xy + z)j + (x^2 + y)k$ dır

b) gradf vektörü yönündeki yani

$\operatorname{grad} f = (y^2 + 2z x)i + (2xy + z)j + (x^2 + y)k$ vek. yönündeki

türevi maksimumdur

5) $F(x,y,z) = \overset{f_1}{x^2 y} i + \overset{f_2}{y^2 z} j + \overset{f_3}{z^2} k$ vektör alanın $A = i + j$ yöndeki

türevi $u = \frac{A}{\|A\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ olmak üzere

$\left.\frac{dF}{dP}\right|_{P_0} = \left.\left(\frac{df_1}{dP} i + \frac{df_2}{dP} j + \frac{df_3}{dP} k\right)\right|_{P_0}$ dır $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy, \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2, \ \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$

$\left.\frac{df_1}{dP}\right|_{P_0} = \left.\left(2xy \frac{1}{\sqrt{2}} + x^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|_{P_0(-1,0,-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2 \cdot -1 \cdot 0\right) + (-1)^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Benzer şekilde

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2yz \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = y^2$

$\left.\frac{df_2}{dP}\right|_{P_0} = \left(0 + (2.0.-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0\right) = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2z$

$\left.\frac{df_3}{dP}\right|_{P_0} = 0$ olur. O halde $\left.\frac{dF}{dP}\right|_{P_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + 0j + 0.k = \frac{1}{\sqrt{2}} i$ olur.